

O SISTEMA MASSA MOLA – ANÁLISE E O PLANO DE FASE. Vitor Alex Alves de Marchi, Rita de Cássia Pavani Lamas. – Matemática – Matemática – Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas – Campus de São José do Rio Preto.

Uma das razões por que vale a pena estudar equações diferenciais lineares com coeficientes constantes é que elas servem como modelos matemáticos de alguns processos físicos importantes. Uma área importante de aplicação é o campo de vibrações mecânicas. Neste trabalho será apresentado, em particular, o sistema massa-mola. Mais especificamente, será analisado o comportamento do movimento de uma massa presa a uma mola nos casos de vibrações sem amortecimento, com amortecimento e superamortecimento. Tal análise possibilita a aplicação de conhecimentos adquiridos no Cálculo Diferencial e Integral. Será ainda obtido o plano de fase do sistema, através do qual será analisada a sua estabilidade. Observamos que esta é a principal contribuição do trabalho, uma vez que a análise será desenvolvida através do sistema de equações diferenciais ordinárias de primeira ordem e não através da equação de segunda ordem, como é encontrado, em geral, nos livros didáticos. A compreensão deste trabalho é de fundamental importância para investigações sobre sistemas vibratórios mais complexos.

O modelo matemático que descreve o movimento de uma massa presa a uma mola, conhecido como oscilador harmônico, é dado pela Equação Diferencial de 2ª ordem

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + c \frac{dy}{dt} + ky = 0. \quad (1)$$

Primeiramente consideraremos o caso onde não haverá a força de arraste ($c=0$). Assim,

$$\frac{d^2 y}{dt^2} = -ky. \quad (2)$$

Essa equação é equivalente ao sistema.

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -ky, & k > 0 \\ \frac{dy}{dt} = x \end{cases}.$$

Os autovalores do sistema são $\lambda_1 = \sqrt{k}i$ e $\lambda_2 = -\sqrt{k}i$, e a solução geral é dada por

$$\begin{aligned} y &= C_1 \sin(\sqrt{k}t) + C_2 \cos(\sqrt{k}t) \\ x &= \sqrt{k}(C_1 \cos(\sqrt{k}t) - C_2 \sin(\sqrt{k}t)) \end{aligned}.$$

O nosso interesse é a função y , solução da equação (2), cujo gráfico é apresentado na figura 1, para os valores $x_0 = 0$, $y_0 = 1$ e $k = 2$.

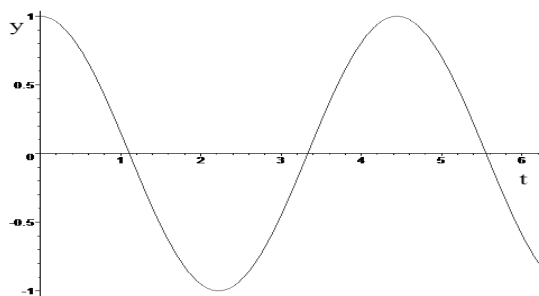


Figura 1 -Trajetória no plano (t,y).

Dizemos que a equação (2) descreve um Movimento Harmônico Simples, ou movimento sem amortecimento.

Vamos considerar agora a constante $c > 0$. Assim a Equação (1) é equivalente ao sistema.

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -cx - ky, & k > 0 \\ \frac{dy}{dt} = x \end{cases} \quad (3)$$

As raízes do polinômio característico associado a este sistema são $\lambda_1 = \frac{-c + \sqrt{c^2 - 4k}}{2}$ e $\lambda_2 = \frac{-c - \sqrt{c^2 - 4k}}{2}$. Teremos que observar 2 casos:

1. Se $c^2 < 4k$ a viscosidade é pequena caracterizando a vibração com amortecimento (Fig. 2), teremos que a solução é da seguinte forma

$$y = \left(C1 \cos\left(\left(\frac{\sqrt{4k - c^2}}{2}\right)t\right) + C2 \sin\left(\left(\frac{\sqrt{4k - c^2}}{2}\right)t\right) \right) e^{-\frac{c}{2}t}$$

$$x = \left(\left(\frac{C2\sqrt{4k - c^2} - C1c}{2k} \right) \cos\left(\left(\frac{\sqrt{4k - c^2}}{2}\right)t\right) + \left(\frac{C1\sqrt{4k - c^2} - C2c}{2k} \right) \sin\left(\left(\frac{\sqrt{4k - c^2}}{2}\right)t\right) \right) e^{-\frac{c}{2}t}$$

O gráfico da solução da equação (3), para os valores $x_0 = 0$, $y_0 = 1$ e $k = 2$ é apresentado na figura 2.

2. Se $c^2 \geq 4k$ a viscosidade é alta caracterizando a vibração com superamortecimento (Fig. 3), as raízes λ_1 e λ_2 são reais e negativas pois $\sqrt{c^2 - 4k} < c$, $c, k > 0$. Se $\lambda_1 \neq \lambda_2$ obtemos as soluções

$$y = C1e^{\lambda_1 t} + C2e^{\lambda_2 t}$$

$$x = \lambda_1 C1e^{\lambda_1 t} + \lambda_2 C2e^{\lambda_2 t}$$

Neste caso, o gráfico da solução da equação (3), para os valores $x_0 = 1$, $y_0 = 0$ e $k = 2$ é apresentado na figura 3.

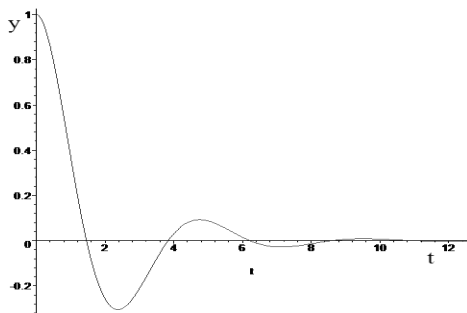


Figura 2 - Trajetória no plano (t,y).

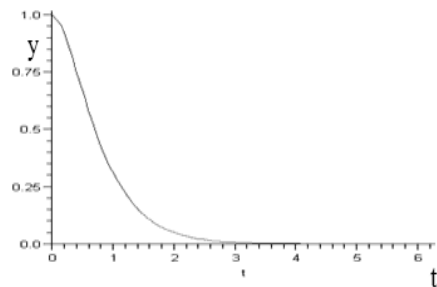


Figura 3 - Trajetória no plano (t,y).

No caso que consideramos a viscosidade nula, podemos observar no gráfico da solução y que o movimento é periódico, e portanto a massa ficaria eternamente oscilando. No entanto, isto não é o que ocorre em sistemas reais. Observando o seu plano de fase podemos concluir que o ponto (0,0) é ponto de equilíbrio estável. Diferente do que foi visto no caso com viscosidade nula, observamos que quando consideramos o amortecimento, o sistema se comporta como esperamos. Oscila em um intervalo de tempo e depois tende a parar. Neste caso, foram analisados dois casos. No primeiro, a viscosidade considerada foi pequena e neste sistema a solução demora um certo tempo para tender ao ponto de equilíbrio. No segundo caso, consideramos a viscosidade alta e observamos que a solução

tende mais rapidamente para o ponto de equilíbrio. Em ambos os casos, através do plano de fase podemos concluir que o ponto $(0,0)$ é assintoticamente estável.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- 1- BASSANEZI, R.C. & JR, W.C.F.- Equações Diferenciais Com Aplicações. Harbra, 1988.
- 2- BRAUN, M.- Differential Equations and Their Applications. Springer- Verlag, New York, 1993.
- 3- BOYCE, W.F.& DIPRIMA, R.C. - Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno. Livros Técnicos e Científicos, 2002.
- 4- Hirsch, M.W , Smale S. & Devaney R.L. – Differential Equations, Dynamical Systems & An Introduction to Chaos, USA, 2002.

Bolsa: FAPESP